MATHEMATIQUES 2ème EPREUVE

Durée 2 H - Coefficient 2

EXERCICE I:

I] On considère pour tout n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_n(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^n}$

(où ln désigne le logarithme népérien).
Pour tout réel X supérieur ou égal à 1, on pose : $I_n(X) = \displaystyle\int_1^X f_n(t)dt$

1°) a) Calculer $I_1(X)$ et $I_n(X)$ pour $n \geqslant 2$.
b) En déduire la valeur de l'intégrale $J(X) = \displaystyle\int_2^X f_2(t)dt$

et sa limite lorsque X tend vers $+\infty$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$f_2(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f_2(t)dt \leqslant f_2(k)$$

II] On considère la suite (S_n) de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^2}$

1°) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$J(n) + \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant S_n \leqslant J(n) + \frac{\ln(2)}{4}$$

2°) Démontrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer un encadrement de sa limite $l = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE II :

Sur $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ un espace probabilisé, on considère la suite $(Y, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs respectivement dans les espaces $\mathbb{N}$ muni de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ pour Y,
et $\{0,1\}$ muni de $\mathscr{P}(\{0,1\})$ pour X_k $(k=1,2,\ldots,n,..)$.

On suppose que Ω est un ensemble de séries de fabrication ω.

$Y(\omega)$ représente le nombre de pièces défectueuses de la série ω.

A SUIVRE

$X_k(\omega)$ représente la nature du défaut de la k-ième pièce de la série ω, avec $X_k(\omega)$ =1 si le défaut provient d'une erreur machine et $X_k(\omega)$ =0 si le défaut provient d'une erreur humaine.
(On suppose qu'il n'existe pas d'autre type d'erreur).

En outre :
Y est une variable aléatoire de loi : $P(Y=i) = p^i(1-p)$
pour i=0,1,.. et p est un réel fixé (0<p<1);

X_k est une variable de Bernoulli de paramètre 1/2 = $P(X_k=1)$
pour k=1,2,...,n,...

1°) Montrer que pour n ⩾ 1 la probabilité qu'une série comporte exactement n pièces défectueuses provenant d'une erreur machine est :

$$\frac{2p^n(1-p)}{(2-p)^{n+1}}$$

On admettra que pour |x| < 1 et pour tout entier n,

la série de terme général $\frac{(n+k)!}{n!\ k!}\,x^k$

converge et a pour somme : $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

2°) Sachant qu'une série de fabrication comporte au moins une pièce défectueuse provenant d'une erreur machine, calculer la probabilité qu'elle en comporte exactement N. (N ⩾ 1).

EXERCICE III :

On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie :

- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dé A;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dé B;

1°) Calculer la probabilité d'obtenir "rouge".

2°) Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup sachant que l'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers coups.

3°) Déterminer la probabilité P_n d'avoir utilisé le dé A sachant que l'on a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$).

FIN